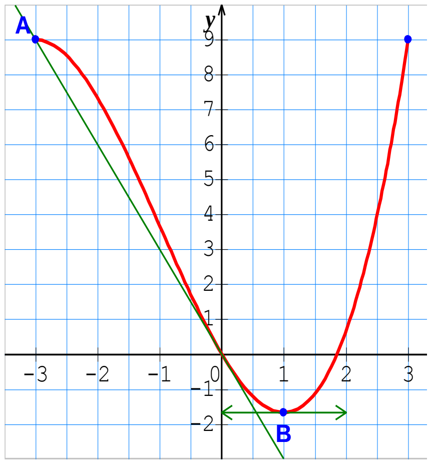
20 مسألة في الدوال العددية

المسألة 01

الشكل الموالي هو التمثيل البياني $\mathscr{C}$ لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$



المنحنى $\mathscr{C}$ يحقق الشروط التالية :

يمر بمبدأ المعلم O ، و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا ويقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O

1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA)؟

2. نفرض أن f معرفة على $[-3;3]$ ب :-

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .

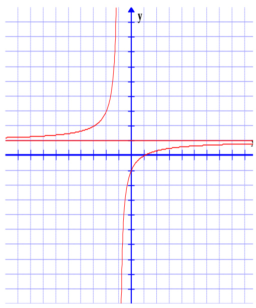
أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$

ب-حلل $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f.

المسألة 02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathfrak{R}-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$



_وليكن (C_f) المنحاها في م.م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الشكل المقابل). **بقراءة بيانية**

- شكل جدول تغيرات الدالة f .
- حل بيانيا المتراجحة $f(x)\succ 0$.
- عين بيانيا قيم x التي تكون من أجلها $0\prec f(x)\prec 1$.

المسألة 03

الدالة العددية f المعرفة على $\mathfrak{R}-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

_وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م. $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين الأعداد a,b,c بحيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.
2. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة التعريف
3. بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلة له.
4. بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيما مقاربا مائلا (C_f).
5. أدرس وضعية المنحنى مع المستقيم المقارب المائل (Δ) .
6. بيّن أنه مهما $x\in\mathfrak{R}-\{-1\}$ فإن: $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
7. عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
8. أكتب معادلة المماس (D) عند النقطة التي فاصلتها 0 .
9. بين أن نقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
10. أرسم كلا من (Δ)، (D) و (C_f) .
11. عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة عدد حقيقي.ناقش بيانيا وحسب قيم $f(x)=m$ حلان مختلفان .

المسألة 04

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ :

$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ _وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الوحدة $1cm$ على محور الفواصل و $4cm$ على محور التراتيب

بيّن أنه مهما تكن $x\in\mathfrak{R}$ فإن: $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$.

- ✓ احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- ✓ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلة له.
- ✓ أدرس وضعية بين المنحنى للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$.
- ✓ احسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- ✓ بيّن أنه مهما تكن $x\in\mathfrak{R}$ فإن: $f(-x)=2-f(x)$.واستنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.
- ✓ أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) .
- ✓ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

المسألة 05

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+x+4}{x+1}$$

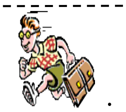
وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م. $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين الأعداد a,b,c بحيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.
2. أدرس تغيرات الدالة f .
3. أوجد معادلات المستقيمات المقاربة، ثم أدرس وضعية المنحنى مع المستقيم المقارب المائل وليكن (Δ) .
4. بين أن نقطة تقاطع الخطين المقاربين هي مركز تناظر.
5. بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين ميلاهما -3 ، ثم أكتب معادلتيهما.
6. أنشئ المنحنى والمماسات بدقة .
7. استنتج إشارة الدالة على مجموعة تعريفها.
8. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $-x^2+(m-1)x-4+m=0$.
9. لتكن الدالة h المعرفة على $\Re-\{-1\}$ حيث:

$$h(x)=\left|\frac{x^2+x+4}{x+1}\right|$$

– بين أن $h(x)=f(x)$ في مجال يطلب تعيينه.

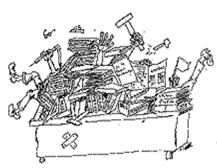
– استنتج رسم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .



بداية العام الدراسي

نهاية العام الدراسي

ربي ورحمتو.. لعام راه طويـــــل..



عاونوني يا خاوتي .. راهي خلات

المسألة 06

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=ax+\frac{b}{4x+2}$ مع a و b عددان حقيقيان.

1. أ - عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب - بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f .

جـ - عين العددين a و b بحيث من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(0)=\frac{7}{2}$ و $f(0)=-\frac{3}{2}$.

2. أ - أحسب النهايات عند حدود المجموعة D_f .

ب - برّر أنه من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(x)>0$.

جـ - أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3. نسمي $\mathcal{C}_f$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$

أ - برهن أن المستقيم ذي المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب للمنحن $\mathcal{C}_f$

ب - أكتب معادلة لمماس المنحنى $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ - برهن أنّ النقطة ω ذات الإحداثيتين $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$. أرسم المنحنى $\mathcal{C}_f$.

انظر الحل صفحة 56 الكتاب المدرسي

المسألة 07

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{|x^2-3x|}{x+1}$$

1. أوجد عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
2. أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.
3. أحسب $\lim\limits_{x\to0}f(x);\lim\limits_{x\to3}f(x);\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x};\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}$. ماذا تستنتج؟
4. أدرس تغيرات الدالة f وأنشئ منحناها.
5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $|x^2-3x|+3mx+3m=0$.

المسألة 08

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بجدول تغيراتها بـ:

x	$+\infty$		0		-1		-2		$-\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

حيث f من الشكل: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ مع a و b و c أعداد حقيقية.

1. عيّن $f'(x)$. ثم استخرج الأعداد a و b و c مستعملا جدول التغيرات.
2. بيّن أن (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$.
3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
4. أرسم المنحنى (C_f) .

المسألة 09

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re-\{-2;1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{x^2+cx+d}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين الثوابت a,b,c,d بحيث المنحنى يقبل محاور مقاربة له وهي: $y=3, x=1, x=-2$ وبحيث يكون ميل المماس في المبدأ هو 3 .
2. أدرس تغيرات الدالة f .
3. بيّن أن (C_f) يقبل على الأقل نقطة انعطاف.
4. أرسم المنحنى (C_f) .
5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-3)x^2+(m+6)x-2m=0$.

المسألة 10

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re-\{2\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{4x^2-11x+7}{2(x-2)}$$

وليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1. أدرس تغيرات الدالة f. ثمّ عين المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) وأحسب إحداثيات a نقطة تقاطعهما وبيّن أنها مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
2. برهن أنه يوجد مماسين للمنحنى (C_f) معامل توجيههما $\frac{3}{2}$.
   - أحسب إحداثيات نقطتي التماس $b;c$ لهذين المماسين مع المنحنى .
   - تحقق من أن النقطتين $b;c$ متناظرتين بالنسبة إلى a . أنشئ المنحنى.
3. نعتبر الدالة الوسيطية للمتغير الحقيقي x المعرفة كمايلي :

$$f_m(x)=\frac{4x^2+(m-8)x-m+4}{2(x-2)}$$ حيث m وسط حقيقي.

– نسمي (C_{f_m}) المنحنى الممثل للدالة f_m في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- بيّن أنه توجد نقطة ثابتة تنتمي إليها كل منحنيات (C_{f_m}) .
- ماهو المنحنى الذي يشمل النقطة التي إحداثياها $(\frac{7}{4};0)$.

المسألة 11

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1;1]$ بـ :

$$f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أدرس قابلية الاشتقاق عند -1 .فسّر النتيجة هندسيا.
2. أدرس قابلية الاشتقاق عند 1 .فسّر النتيجة هندسيا.
3. أدرس تغيرات الدالة f .
4. أكتب معادلة (T) للمنحنى (C_f) في المبدأ.
5. أدرس وضعية المماس (T) بالنسبة إلى المنحنى (C_f) .
6. أرسم المنحنى (C_f) .

المسألة 12

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re-\{0\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+3x-1}{x^2}$$

_وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م. $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}$.
2. أوجد مشتقة الدالة f ثم بين أن $f'(1)=0$ ثم أدرس إشارة f'. ماذا تستنتج ؟ أحسب النهايات ثم أكتب جدول التغيرات.
3. أوجد معادلات المستقيمات المقاربة. أدرس وضعية المنحنى مع المستقيم المقارب المائل وليكن (Δ). عين نقطة تقاطع الخطين المقاربين.
4. عين معادلة المماس (k) للمنحنى عند النقطة $A(1;2)$.
5. أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0{,}3;0{,}4[$ – ثم استنتج إشارة الدالة على مجموعة تعريفها.
6. بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (D) موازيا للمستقيم (Δ) ، ثم أكتب معادلته. أنشئ المنحنى والمماسات بدقة .
7. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $x-y+m=0$. ثم تحقق منها حسابيا.
8. لتكن h معرفة على $\Re^*$ حيث: $h(x)=\left|\frac{x^3-x^2+3x-1}{x^2}\right|$

-استنتج رسم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

المسألة 13

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}$$

_وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م. $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها وأنه مهما يكن العدد الحقيقي x من هذه المجموعة فإن:

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$$

2. أدرس تغيرات الدالة f .
3. ثمّ بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة x_0 حيث: $-\frac{3}{8}\prec x_0\prec-\frac{1}{4}$.
4. أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة التي فاصلتها 0 .
5. أرسم المنحنى (C_f) والمماس (Δ) .
6. m عدد حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $2x^3+(7-m)x^2+2(4-m)x+2-m=0$
7. لتكن h معرفة على $\Re-\{-1\}$ حيث: $h(x)=f(|x|)$

-بين أن الدالة h زوجية.

-استنتج رسم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

المسألة 14

g هي الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث:

$$g(x)=x^3-2x^2+x+1$$

بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين $\frac{-1}{2}$ و 0 .

* نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+x+1}{x^2-2x+2}$$

_وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

بيّن أنه مهما تكن $x\in\Re$ فإن: $f(x)=x-\frac{x-1}{x^2-2x+2}$.

بيّن أنه مهما تكن $x\in\Re$ فإن: $f'(x)=\frac{(x-1)^2[(x-1)^2+3]}{[(x-1)^2+1]^2}$.

- ✓ أدرس تغيرات f وعين المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .
- ✓ أدرس وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.
- ✓ شكّل معادلات المماسات للمنحنى التي ميلها 1.
- ✓ أنشئ (C_f) والمماسات.
- ✓ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادل $f(x)=x+m$.

20 مسألة في الدوال العددية

المسألة 15

I. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\Re$ بـ :

$$h(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

✓ أدرس تغيرات الدالة h.ثمّ استنتج إشارة $h(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re - \{-1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

1.بيّن أن $f'(x) = \frac{2h(x)}{(x+1)^3}$.

2.أدرس تغيرات الدالة f .

3.بيّن أنه يوجد ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

4.بيّن أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين أحدهما مائل وليكن (Δ) .ثمّ أدرس وضعية المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5.بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 \in \left]\frac{-3}{8}; \frac{-1}{4}\right[$.

6.أرسم المنحنى (C_f) .

7.ناقش حسب الوسيط m عدد نقاط تقاطع (C_f) والمستقيم الذي معادلته $y = 2x + m$.

III. g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\Re$:

$$g(x) = f(|x|) .$$

✓ بيّن أن الدالة g زوجية.

✓ أرسم منحناها البيانيوذلك باستعمال (C_f) في معلم آخر.

المسألة 16

• نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re - \{-1\}$ بـ :

$$f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.أدرس قابلية الاشتقاق للدالة عند $x_0 = -2$، ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المتحصل عليها.

2.أدرس تغيرات الدالة f .

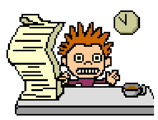
3.برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين .

4.أدرس الوضعية بين المنحنى والمستقيمين المقاربين.ثمّ أرسم المنحنى .

• نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\Re$ بـ :

$$g(x) = ||x| + 2| + \frac{1}{|x| + 1}$$

- بيّن أن الدالة g زوجية.
- أرسم المنحنى (C_g) اعتمادا على (C_f) .



المسألة 17

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re - \{1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1/ نسمي h الدالة المعرفة على $\Re$ بـ: $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

أدرس تغيرات الدالة h .

بيّن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \prec \alpha \prec 3$ ، جد حصرا له سعته 10^{-2} . استنتج إشارة $h(x)$.

2/ أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها .

بيّن أنه من أجل $x \neq 1$ فإن: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x-1)^3}$.

بيّن أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$.ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f .

3/ بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .

4/ حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) . أرسم المنحنى (C_f) .

5/ استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$: m وسيط حقيقي.

المسألة 18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أدرس تغيرات الدالة f .
2. برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين .
3. بيّن أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ هو محور التناظر.
4. أرسم المنحنى (C_f) .
5. أوجد إحداثيات النقطة a بحيث يكون معامل توجيه المماس هو $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
6. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\Re$ بـ :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| + 2}$$

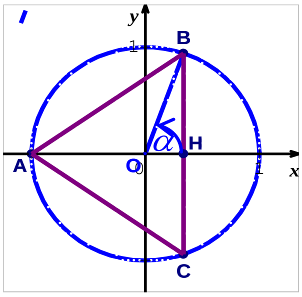
- بيّن أن الدالة g زوجية.
- أرسم المنحنى (C_g) اعتمادا على (C_f) .

20 مسألة في الدوال العددية

المسألة 19

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

مثلث ABC متساوي الساقين رأسه $A\left(-1;0\right)$ ، محيط بالدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 . النقطة B تقع فوق المحور $\left(Ox\right)$، و H المسقط العمودي للنقطة A على $\left(BC\right)$.



ليكن α قيسا رئيسيا موجبا مقدّرا بالراديان للزاوية $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$.

1) . عين إحداثيتي النقطة B .

. عبّر عن المسافتين BH و AH بدلالة α .

. استنتج بدلالة α مساحة المثلث ABC .

2) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\left[0;\pi\right]$ بـ :

$f\left(x\right)=\sin x\left(1+\cos x\right)$.

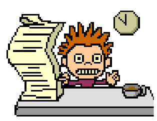
أ . عين الدالة المشتقة للدالة f وبرهن أنّه من أجل كل $x\in\left[0;\pi\right]$
$f'\left(x\right)=2\cos^2 x+\cos x-1$.

استنتج أنّه من أجل كل $x\in\left[0;\pi\right]$ ،

$f'\left(x\right)=\left(2\cos-1\right)\left(\cos x+1\right)$.

ب . أدرس اشارة $f'\left(x\right)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) برهن أنّه توجد قيمة للعدد α التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن ، المطلوب تحديد هذه المساحة . ما هي إذن طبيعة المثلث ABC .



المسألة 20

من جذع شجرة دائري المقطع قطره D ، نريد الحصول على رافد مستطيل المقطع قاعدته x وارتفاعه h .

نحصل على المقاومة القصوى (العظمى) في الانحناء كلما كان المقدار xh^2 كبيرا مع $h>x$.

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ بِـ :

$f\left(x\right)=-x^3+\frac{9}{4}x$.

$\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث يؤخذ $\|\vec{i}\|=2\|\vec{j}\|=2cm$.

1. أحسب $f'\left(x\right)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة f .

2. أكتب معادلة لِـ t_1 مماس المنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة O ثم معادلة لِـ t_2 مماس المنحني $\mathcal{C}$ عند نقطته A ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ ؛ ثم أدرس على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ الوضعية النسبية للمنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة لِـ t_1 وبالنسبة لِـ t_2 .

3. أنشئ المماسين t_1 و t_2 ثم المنحني $\mathcal{C}$.

II) تطبيق : نضع $D=1,5m$. (D هو قطر المقطع الدائري لجذع الشجرة)

1. اشرح لماذا $x^2+h^2=\frac{9}{4}$.

2. أحسب xh^2 بدلالة x .

3. استعمل الجزء I) لإيجاد x و h بحيث تكون للرافد أقصى مقاومة للانحناء .